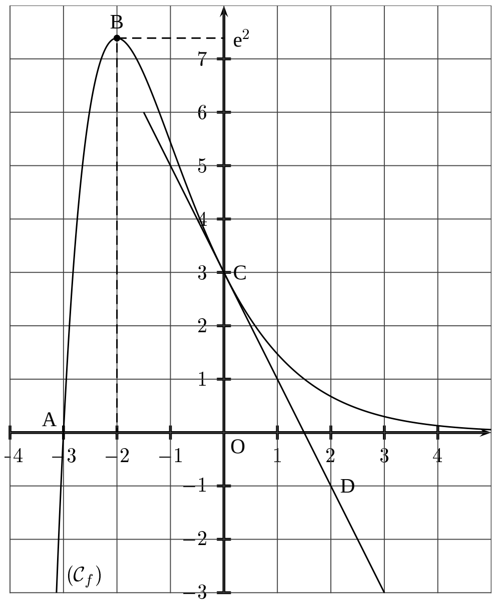
Exercice 1 (4 points)

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la figure ci-dessous est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ +\infty[$.
On donne les renseignements suivants :

- les points A$(-3\ ;\ 0)$, B$\left(-2\ ;\ \mathrm{e}^2\right)$ et C$(0\,;\,3)$ sont des points de la courbe $(\mathcal{C}_f)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$;
- la droite tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en son point C passe par le point D$(2\ ;\ -1)$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Pour chacune des affirmations suivantes, **dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse** à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

1. La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 1.
2. $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.
4. Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ +\infty[$, alors la fonction F est décroissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$.
5. $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 6$.



Exercice 2 - Obligatoire (5 points)

► **Partie A :** Soit g la fonction définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x+3}$.

1. Dériver g et déterminer son sens de variation sur $]-3\,;\,+\infty[$.

2. Calculer $g(-2)$. En déduire, à l'aide de la question précédente, le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$. *(justifier votre réponse)*

3. Déduire de la question précédente que toute primitive G de g sur $]-3\,;+\infty[$ admet un minimum en -2 . *(on pourra d'abord étudier les variations de G)*

4. Déterminer la primitive G de g sur $]-3\,;\,+\infty[$ telle que $G(-2) = 0$.

► **Partie B :** Soit f la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left[g(x)\right]$.

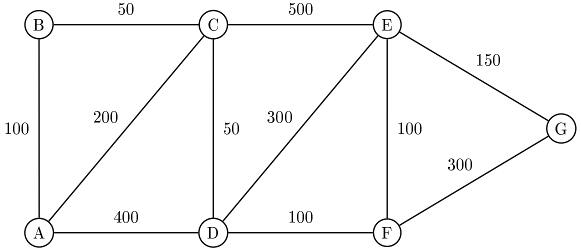
1. Étudier les limites de f en -2 et en $+\infty$.

2. Dériver f et montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$.

3. Étudier les variations de f sur $]-2\ :\ +\infty[$.

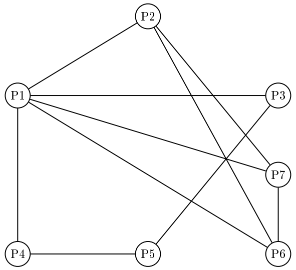
Exercice 2 - Spécialité (5 points)

1. Lors d'une grande conférence internationale, sept hôtels parisiens (notés de A à G) ont été présélectionnés pour accueillir les membres des différentes délégations. Pour des raisons de sécurité, des itinéraires entre les différents hôtels ont été organisés par les services de sécurité selon le schéma suivant (le long de chaque arête figure la distance en mètres entre deux hôtels) :



a) Un responsable de la sécurité est chargé d'inspecter les itinéraires entres les hôtels.
Peut-il partir d'un hôtel et arriver dans un autre hôtel en empruntant chaque itinéraire une fois et une fois seulement ? Si oui, préciser les deux hôtels pour lesquels c'est possible. *(justifier vos réponses)*
b) Un autre responsable de la sécurité souhaite aller de l'hôtel A à l'hôtel G en utilisant les itinéraires prévus. Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le trajet qu'il doit emprunter pour que la distance qu'il doit parcourir soit la plus petite possible *(donner ce trajet)*.

2. Sept pays (notés de P1 à P7) sont représentés lors de cette conférence. Pour des raisons de sécurité, il est prévu que les délégations de certains pays ne se retrouvent pas dans le même hôtel. Les incompatibilités entre les délégations sont résumées par le graphe suivant (une arête entre deux pays indique que les délégations de ces deux pays ne doivent pas se retrouver dans le même hôtel) :



a) Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe. *(justifier votre réponse)*
b) En colorant le graphe à l'aide du tableau ci-dessous *(que l'on recopiera et complètera en respectant l'ordre du tableau lors de l'application de l'algorithme)*, déterminer le nombre minimal d'hôtels nécessaire à l'hébergement des différentes délégations.

Pays	P1	P2	P6	P7	P3	P4	P5
Degré du sommet	5	3	3	3	2	2	2
Couleur (on utilisera des lettres : A, B, C...)							

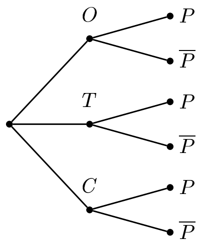
Exercice 3 (5 points)

Les salariés d'une entreprise se répartissent de la façon suivante :
- 60% sont des ouvriers ;
- 30% sont des techniciens ;
- tous les autres salariés sont des cadres.

Le PDG de l'entreprise décide de distribuer au mois de décembre une prime basée sur le mérite à certains salariés (ouvriers, techniciens ou cadres). Les critères d'attribution font que 50% des ouvriers, 70% des techniciens et 90% des cadres ont touché la prime.

1. On choisit au hasard un salarié de cette entreprise et on note :
- O , l'événement : « le salarié est un ouvrier » ;
- T , l'événement : « le salarié est un technicien » ;
- C , l'événement : « le salarié est un cadre » ;
- P , l'événement : « le salarié a touché la prime ».

a) Recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter le, à l'aide des informations données ci-dessus.



b) Déterminer la probabilité que le salarié soit un technicien et qu'il ait touché la prime.
c) Montrer que la probabilité que le salarié ait touché la prime est égale à $0,6$.
d) Calculer la probabilité que le salarié soit un cadre sachant qu'il a touché la prime.

2. Le montant de la prime est de 100 euros pour un ouvrier, 150 euros pour un technicien et 200 euros pour un cadre.
On note X le montant de la prime reçue par un salarié pris au hasard (on prendra $X = 0$ pour un salarié ne touchant pas la prime).
a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous représentant la loi de probabilité de X . *(on indiquera le détail du calcul de chaque probabilité)*

Valeurs possibles de X	0	100	150	200
Probabilité				

b) Calculer l'espérance de cette loi de probabilité et préciser ce qu'elle représente.

3. On choisit au hasard et de façon indépendante trois salariés de l'entreprise (on suppose que le nombre de salariés est suffisamment grand pour assimiler le choix des trois salariés à des tirages successifs avec remise).
Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois salariés ait touché la prime ?

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -(\ln x)^2 + 2\ln x + 3$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de f en 0.
Quelle interprétation graphique peut-on donner de cette limite ?

2. En remarquant que $f(x) = (\ln x)(-\ln x + 2) + 3$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Dériver f et montrer que $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$. *(on dressera le tableau de variations de f et on indiquera la valeur de $f(e)$)*

5. Calculer $f\left(\dfrac{1}{e}\right)$. En déduire, à l'aide de la question précédente, que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e}\,;\,e\right]$. *(justifier votre réponse)*

6. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = -x(\ln x)^2 + 4x\ln x - x$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

7. On note A l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = e$.
Calculer A et montrer que A est égale à $\left(2e + \dfrac{6}{e}\right)$ unités d'aire.