

**Exercice 1. (8 pts)**

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice,  $n$  est un entier naturel non nul. On considère les événements :

$G_n$  : « Pierre gagne la  $n$ -ième partie »

$P_n$  : « Pierre perd la  $n$ -ième partie »

On pose :  $p_n = p(G_n)$  et  $q_n = p(P_n)$ .

1. Recherche d'une relation de récurrence.

a) Déterminer  $p_1$  puis les probabilités conditionnelles  $p_{G_1}(G_2)$  et  $p_{P_1}(G_2)$ .

b) Justifier l'égalité  $p_n + q_n = 1$ .

c) Démontrer que pour tout entier naturel  $n > 0$  :

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$$

2. Étude de la suite  $(p_n)$ .

On pose, pour tout entier naturel  $n > 0$  :  $v_n = p_n - \frac{2}{5}$ .

a) Prouver que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique et exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b) En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .

c) Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 2. (9 pts)**

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée.

On note  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  la probabilité d'obtenir respectivement 1, 2, 3 et 4 sur la face cachée.

Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  sont, dans cet ordre, les termes d'une suite arithmétique.

1. Sachant que  $p_4 = 0,4$ , démontrer que  $p_1 = 0,1$ ,  $p_2 = 0,2$  et  $p_3 = 0,3$ .

2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants : la probabilité d'obtenir un nombre donné est la même à chaque lancer.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir les nombres 1, 2 et 4 dans cet ordre ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note  $X$  la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le nombre 4 est obtenu.

a) Pour  $0 \leq k \leq 10$ , exprimer en fonction de  $k$  la probabilité de l'événement  $(X = k)$ .

(aucune démonstration n'est demandée)

b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

c) Calculer la probabilité de l'événement  $(X \geq 1)$ .

4. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On lance  $n$  fois le dé, les lancers étant encore supposés deux à deux indépendants.

On note  $U_n$  la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au  $n$ -ième lancer.

a) Montrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique et qu'elle converge vers 0.

b) Calculer  $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$  en fonction de  $n$ .

Calculer la limite de la suite  $(S_n)$ .

c) Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $S_n > 0,999$ .

**Exercice 3. (3 pts)**

Déterminer tous les entiers naturels  $n \geq 3$  qui vérifient

$$\binom{n}{3} \geq 5 \binom{n}{1}$$

**Exercice 1.** (8 pts)

1. a) D'après le texte :  $p_1 = 1 - p_1 \iff p_1 = \frac{1}{2}$ .

Toujours d'après le texte :

$$p_{G_1}(G_2) = 0,7 \quad \text{et} \quad p_{P_1}(G_2) = 1 - 0,8 = 0,2$$

- b)  $P_n$  est l'événement contraire de  $G_n$ , ce qui implique :

$$q_n = 1 - p_n \iff p_n + q_n = 1$$

- c) Au préalable, on remarque que  $p_{n+1} = p(G_{n+1})$ .

Puisque  $P_n$  et  $G_n$  forment une partition de l'univers, par application de la « formule des probabilités totales », on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(G_{n+1} \cap G_n) + p(G_{n+1} \cap P_n) \\ &= p(G_n) \cdot p_{G_n}(G_{n+1}) + p(P_n) \cdot p_{P_n}(G_{n+1}) \\ &= p_n \cdot 0,7 + q_n \cdot 0,2 \\ &= p_n \cdot 0,7 + (1 - p_n) \cdot 0,2 \\ &= 0,5p_n + 0,2 \end{aligned}$$

2. a) On calcule  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{5} \\ &= 0,5p_n + 0,2 - 0,4 \\ &= 0,5p_n - 0,2 \\ &= 0,5(p_n - 0,4) \\ &= 0,5 \left( p_n - \frac{2}{5} \right) \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

Par conséquent  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,5.

- b) Puisque  $v_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ , on obtient :
- $$v_n = 0,1 \cdot (0,5)^{n-1}$$

$$\text{On en déduit : } p_n = v_n + \frac{2}{5} = 0,4 + 0,1 \cdot (0,5)^{n-1}$$

- c) Puisque  $-1 < 0,5 < 1$ , on a d'après le cours :  $\lim 0,5^n = 0$ .

On en déduit avec les théorèmes sur les limites et les opérations:

$$\lim p_n = 0,4$$

**Exercice 2.** (9 pts)

1. La somme  $S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$  doit être égale à 1.

$$\text{Or, si } (p_n) \text{ est arithmétique : } S = \frac{(p_1 + p_4) \cdot 4}{2}.$$

$$\text{Par conséquent : } 1 = 2(p_1 + 0,4) \iff p_1 = 0,1.$$

Soit  $r$  la raison de la suite  $(p_n)$ . Nous avons :

$$p_4 = p_1 + 3r \iff 0,4 = 0,1 + 3r \iff r = 0,1$$

On en déduit  $p_2 = p_1 + r = 0,2$  puis  $p_3 = p_2 + r = 0,3$ .

2. a) En raison de l'hypothèse d'indépendance, la probabilité d'obtenir les nombres 1, 2 et 4 dans cet ordre est :

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_4 = 0,008$$

- b) L'événement « on a obtenu trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant » est la réunion disjointe des événements suivants :

« on a obtenu 1, 2 et 3 dans cet ordre »

« on a obtenu 1, 2 et 4 dans cet ordre »

« on a obtenu 1, 3 et 4 dans cet ordre »

« on a obtenu 2, 3 et 4 dans cet ordre »

Sa probabilité est la somme de leurs probabilités, c'est-à-dire :

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_3 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 0,05$$

3. a) On reconnaît le schéma de Bernoulli :  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(10; 0,4)$  et d'après le cours, pour  $0 \leq k \leq 10$ , on a :

$$p(X = k) = \binom{10}{k} 0,4^k 0,6^{10-k}$$

- b) Toujours d'après le cours :  $E(X) = 10 \cdot 0,4 = 4$ .

- c)  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,6^{10} \approx 0,994$ .

4. a) Considérons l'événement « on obtient le nombre 4 pour la pre-

mière fois au  $n$ -ième lancer ».

Cet événement est l'intersection des événements suivants :

- « on obtient un autre nombre que 4 au premier lancer »
- « on obtient un autre nombre que 4 au second lancer »
- $\vdots$
- « on obtient un autre nombre que 4 au  $(n - 1)$ -ième lancer »
- « on obtient le nombre 4 au  $n$ -ième lancer »

On en déduit  $p(U_n) = 0,6^{n-1} \cdot 0,4$ .

Puisque  $U_{n+1} = 0,6 \cdot U_n$ , la suite  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $0,6$ .

Puisque  $-1 < 0,6 < 1$  on a  $\lim 0,6^{n-1} = 0$  et donc  $\lim U_n = 0$ .

b) On applique le résultat du cours sur la somme des termes d'une suite géométrique :

$$S_n = U_1 \cdot \frac{1 - 0,6^n}{1 - 0,6} = 0,4 \cdot \frac{1 - 0,6^n}{0,4} = 1 - 0,6^n$$

On en déduit  $\lim S_n = 1$ .

c) On résout :

$$1 - 0,6^n > 0,999$$

$$\iff 0,001 > 0,6^n$$

$$\iff \ln 0,001 > n \ln 0,6$$

$$\iff \frac{\ln 0,001}{\ln 0,6} < n$$

Puisque  $\frac{\ln 0,001}{\ln 0,6} \approx 13,52$ , le premier entier qui vérifie cette condition est 14.

### Exercice 3. (3 pts)

Il s'agit de résoudre pour  $n \geq 3$  l'inéquation :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \geq 5n$$

$$\iff (n-1)(n-2) \geq 30$$

$$\iff n^2 - 3n - 28 \geq 0$$

Le trinôme  $x^2 - 3x - 28$  a pour discriminant  $\Delta = 9 + 12 = 121 = 11^2$ .

Il a donc deux racines réelles qui sont :

$$x' = \frac{3 - 11}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{3 + 11}{2} = 7$$

Ce trinôme est positif à l'extérieur des racines, c'est-à-dire lorsque :

$$x \leq -4 \quad \text{ou} \quad x \geq 7$$

Puisque  $n > 0$ , la condition est vérifiée lorsque  $n \geq 7$ .

---