

BACCALAURÉAT DU SECOND DEGRÉ - LYCÉE BERNARD PALISSY

Épreuve : MATHÉMATIQUES

Série : S

Durée : 4 heures

Session : " bac blanc " 2007

Nombre de pages : 04

Chaque candidat traitera quatre exercices. L'exercice n°2 est différent selon que le candidat a suivi ou non l'enseignement de spécialité mathématiques.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Exercice 1 - commun à tous les candidats (5 points).

L'énoncé ci-dessous comporte cinq questions : 1. , 2.a) , 2.b) , 3. et 4.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, la bonne et deux mauvaises.

Le candidat indiquera pour chaque question la lettre correspondant à la réponse qu'il propose.

Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse retire un demi point.

L'absence de réponse n'est pas prise en compte.

Dans le cas d'un total négatif, la note finale est ramenée à zéro.

1. Dans une classe de 24 élèves, 12 élèves jouent au tennis, 8 élèves jouent au football et 5 élèves jouent à la fois au tennis et au football.

On interroge au hasard un élève de cette classe. La probabilité que cet élève ne joue ni au tennis ni au football est :

- A $\frac{1}{6}$ B $\frac{3}{8}$ C $\frac{19}{24}$

2. La probabilité pour un individu d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,01.

Un test de dépistage a été réalisé pour cette maladie. Avec ce test, on peut dire que :

si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 90% des cas,

le test est positif pour 3% des personnes saines.

a) On prend un individu au hasard dans la population, la probabilité que le test soit positif pour cet individu est :

- A 0,009 B 0,027 C 0,0387

b) Le test étant positif, la probabilité que l'individu soit atteint de la maladie M est, à 0,01 près :

- A 0,93 B 0,23 C 0,90

3. On dispose de deux urnes. Une urne U_1 contenant quatre jetons numérotés 1, 1, 2, 3 et une urne U_2 contenant trois jetons numérotés 2, 3, 3.

On tire au hasard un jeton dans chaque urne et on appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe la valeur absolue de la différence des numéros portés par les deux jetons.

L'espérance mathématique de X est :

- A 1 B $\frac{13}{12}$ C $\frac{5}{6}$

4. On lance n fois de suite un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On appelle p_n la probabilité d'obtenir au moins une fois le 6.

La plus petite valeur de n telle que $p_n > 0,99$ est :

- A 16 B 26 C 100

Exercice 2 - pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques (5 points).

Le plan est rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct (unité graphique 2cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1. Placer ces points dans le repère.
2.
 - a) Vérifier que $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
 - b) En déduire la nature du triangle ABC . Justifier.
 - c) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC .
3.
 - a) Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2 (on pourra poser $z = x + iy$, avec x et y réels). Préciser le rayon de Γ_2 .
 - b) Vérifier que A et B appartiennent à Γ_2 .
 - c) Construire Γ_2
4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - a) Quelles sont les images de A et de B par r_1 ? Justifier.
Construire le point C_1 , image de C par la rotation r_1 , puis calculer son affixe.
 - b) Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1 .
5. Soit r la rotation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$ avec a et b nombres complexes, a vérifiant : $|a| = 1$ et $a \neq 1$.

On suppose que r transforme Γ_2 en Γ_1 .

 - a) Quelle est l'image de Ω par r ? En déduire une relation entre a et b .
 - b) Déterminer en fonction de a l'affixe du point C' , image du point C par r .
 - c) En déduire que C' appartient à un cercle fixe que l'on déterminera.
 - d) Vérifier que ce cercle passe par C_1 .

Exercice 2 - pour les candidats ayant choisi la spécialité mathématiques (5 points).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (On prendra 5 cm pour unité graphique).

On considère le point A d'affixe $\sqrt{2}$ et B d'affixe i . Soit C le point tel que $OACB$ soit un rectangle. On note I le milieu du segment $[O, A]$, J le milieu du segment $[B, C]$ et K le milieu du segment $[A, I]$.

Placer les points sur une figure.

1. Calculer les affixes des points C, I, J et K .

2. On considère la transformation s de \mathcal{D} dans \mathcal{D} qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' \text{ tel que } z' = -i \frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i.$$

a) Démontrer que s est une similitude de centre Ω d'affixe $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$ et dont on déterminera le rapport k et une mesure θ de l'angle.

b) Déterminer les images par s des points O, A, B et C .

3. a) Calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$. En déduire que A, B et Ω sont alignés.

b) En déduire de même que I, C et Ω sont alignés.

c) En déduire une construction de Ω . Placer Ω sur la figure.

4. a) Montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs $[BC]$ et $[AI]$.

b) Démontrer que les points J, Ω et K sont alignés.

c) démontrer que la droite (ΩO) est la tangente commune aux cercles Γ_1 et Γ_2 . Représenter les cercles Γ_1, Γ_2 et la droite (ΩO) sur la figure.

Exercice 3 - commun à tous les candidats (4 points).

Le marché téléphonique d'une ville imaginaire où tous les habitants sont équipés, se partage entre deux sociétés A et B . Au départ, la société A détient 80% du marché. Du fait de la concurrence que se livrent les deux sociétés, chaque année :

30 % des clients de la société A deviennent clients de la société B

10 % des clients de la société B deviennent clients de la société A

On note a_n et b_n la part de marché des sociétés A et B au bout de n années de concurrence.

On a donc au départ $a_0 = 0,8$ et $b_0 = 0,2$.

1. Justifier pour tout entier n les deux relations suivantes :

$$a_{n+1} = 0,7a_n + 0,1b_n$$

$$b_{n+1} = 0,3a_n + 0,9b_n$$

Vérifier que la suite $a_n + b_n$ est constante.

2. On définit maintenant, pour tout entier n : $v_n = -3a_n + b_n$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

3. Calculer v_0 . En déduire v_n en fonction de n et calculer la limite de v_n .

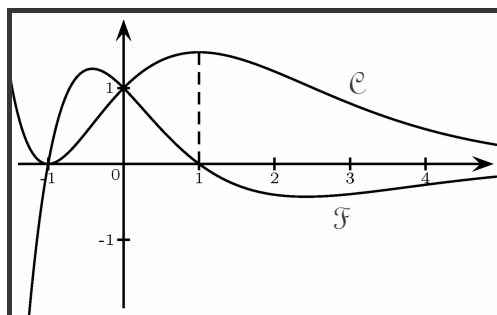
4. Déduire des questions précédentes : $a_n = \frac{1 + 2,2 \times 0,6^n}{4}$.

Quel sera à long terme la part de marché de la société A si l'on suppose les conditions de l'énoncé constamment vérifiées ?

5. Au bout de combien d'années la part de marché de la société A sera inférieure à 30% ?

Exercice 4 - commun à tous les candidats (6 points).

Partie A : Lectures graphiques



On donne dans un repère orthogonal les courbes \mathcal{C} et \mathcal{F} représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} .

On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre ; on peut donc les noter g et g' .

1. Associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

On justifiera le résultat en donnant un tableau dans lequel figureront sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; 5\right]$, le signe de $g'(x)$ et les variations de g .

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 ?

Partie B : Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$.

1. Démontrer que la fonction f_0 définie sur \mathbb{R} par $f_0(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E') $y' + y = 0$.
3. Démontrer que f est une solution de (E) si et seulement si $u = f - f_0$ est une solution de (E').
En déduire pour x réel, l'expression de $f(x)$ lorsque f est solution de (E).
4. Sachant que la fonction g de la partie A est solution de (E), déterminer $g(x)$ pour x réel.
5. Déterminer la solution h de (E) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

Partie C : Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On sait que f est dérivable sur \mathbb{R} ; déterminer sa fonction dérivée et étudier son signe.
Dresser alors le tableau de variation de f .
3. Dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 2 cm), on note \mathcal{C} la représentation graphique de f .
 - a) Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C} au point Ω d'abscisse -1 .
 - b) Tracer la courbe \mathcal{C} et sa tangente T dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Bac blanc mathématiques TS 2007 – Corrigé de l'exercice 1.

Les bonnes réponses sont les suivantes :

1. **B** 2.a) **C** 2.b) **B** 3. **B** 4. **B**

1. Appelons T l'événement "l'élève joue au tennis" et F l'événement "l'élève joue au football".

Selon l'énoncé : $P(T) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$, $P(T \cap F) = \frac{5}{24}$.

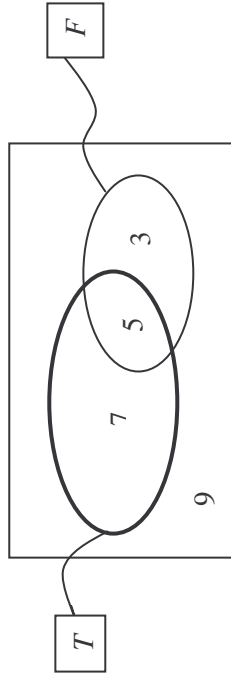
La probabilité que l'élève joue au tennis *ou* au football est :

$$P(T \cup F) = P(T) + P(F) - P(T \cap F) = \frac{12}{24} + \frac{8}{24} - \frac{5}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

La probabilité que l'élève ne joue ni au tennis ni au football est donc :

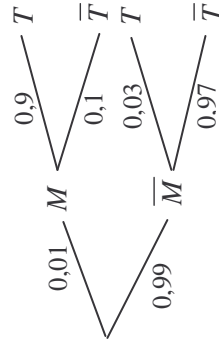
$$1 - P(T \cup F) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

On peut aussi – et plus simplement – utiliser un diagramme :



La probabilité cherchée est : $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

2. On appelle M l'événement :
 "l'individu est atteint de la maladie M "
 et T l'événement :
 "le test est positif".



a) $P(T) = 0,01 \times 0,9 + 0,99 \times 0,03 = \boxed{0,0387}$

b) $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,01 \times 0,9}{0,0387}$, $P_T(M) \approx \boxed{0,23}$.

3. On peut représenter toutes les issues possibles et les valeurs prises par X dans un tableau :

U_1	1	1	2	3
U_2	2	1	3	0
	3	2	1	0
	3	2	1	0

La loi de probabilité de X est alors :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{12}$

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{4}{12} = \frac{13}{12}$$

4. Si on lance un dé n fois de suite, la probabilité de ne jamais obtenir le 6 est $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois le 6 est donc : $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,01 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln(0,01) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

(on rappelle que $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ est strictement négatif) .

$$25 < \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} < 26 \text{ donc la plus petite valeur de } n \text{ telle que } p_n > 0,99 \text{ est } \boxed{26}.$$

Corrigé exercice n°2. (candidats n'ayant pas choisi la spécialité math)

$$2) a) \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{(-3 - i\sqrt{3})^2}{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b) D'après la question précédente $(z_B - z_C) = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_A - z_C)$.

On en déduit que B est l'image de A par rotation de centre C d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans le

sens direct, donc le triangle ABC est équilatéral.

c) Comme ABC est équilatéral, le centre de son cercle circonscrit est confondu avec son centre de gravité (isobarycentre des points A, B et C)

$$L' \text{ affixe du centre est } \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} + 2}{3} = 0.$$

Le rayon du cercle est $OC=2$.

Γ_1 est le cercle de centre O et de rayon 2

3) a) Posons $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow 2 \times 2x + (x^2 + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4$$

Γ_2 est le cercle de centre $\Omega(-2)$ et de rayon 2.

b) $A\Omega = |z_A - z_\Omega| = |-1 + i\sqrt{3} + 2| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1^2 + 3} = 2$ donc $A \in \Gamma_2$

$$B\Omega = |z_B - z_\Omega| = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \text{ donc } B \in \Gamma_2.$$

4) a) $r_1(A) = A$ car le centre de la rotation est invariant.

$r_1(B) = C$ car ABC est équilatéral direct.

$$r_1(C) = C_1 \text{ d'où } z_{C_1} = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_C - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (3 - i\sqrt{3}) - 1 + i\sqrt{3}$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{3i}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - 1 + i\sqrt{3} = 2 + 2i\sqrt{3}$$

b) L'image de Γ_2 est le cercle de centre $r_1(\Omega)$ et de même rayon que Γ_2 .

Or l'image Ω a pour affixe :

$$z'_\Omega = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_\Omega - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (-1 - i\sqrt{3}) - 1 + i\sqrt{3}$$

$$z'_\Omega = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 + i\sqrt{3} = 0$$

L'image de Γ_2 est le cercle de centre O et de rayon 2 donc $r_1(\Gamma_2) = \Gamma_1$

5) $r: M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = az + b$ et $|a|=1$.

a) r transforme Γ_2 en Γ_1 donc $r(\Omega) = O$ d'où

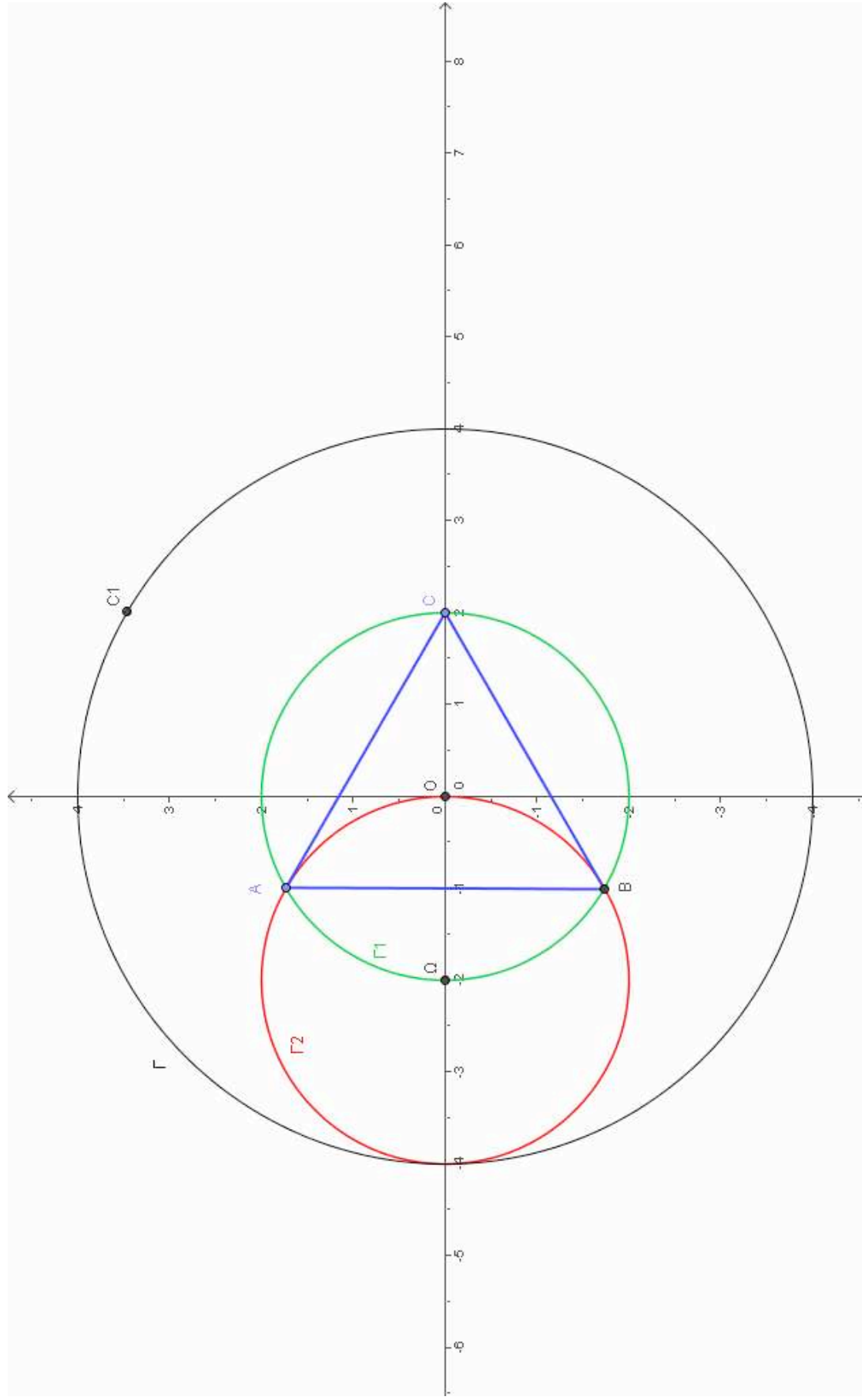
$$0 = az_\Omega + b \text{ d'où } 0 = -2a + b \text{ d'où } b = 2a.$$

b) $C' = r(C)$ d'où $z_{C'} = az_C + b = 2a + b = 2a + 2a = 4a$.

c) $|z_{C'}| = |4a| = 4|a| = 4 \times 1 = 4$ donc C' appartient au cercle de centre O de rayon 4.

d) $OC_1 = |z_{C_1}| = |2 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$ donc C_1 est un point de ce cercle.

FIGURE DE L'EXERCICE 2 (non spécialistes).



BB 2007 exercice 2 Math : corrigé

1. $OACB$ est un rectangle donc $OC = OA + OB$ et C a pour affixe $\sqrt{2} + i$.

I est le milieu de $[OA]$ donc a pour affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

J est le milieu de $[BC]$ donc a pour affixe $\frac{1}{2}(i + \sqrt{2} + i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$;

K est le milieu de $[AI]$ donc a pour affixe $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

2. a) La transformation s a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$: c'est une similitude directe. Son centre Ω a pour affixe la solution de l'équation $z = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$ c'est-à-dire :

$$z = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i}{1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2i}{2 + i\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + 2i)(2 - i\sqrt{2})}{6} = \frac{4\sqrt{2} + 2i}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i.$$

Son rapport est $k = \left| -i\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et son angle $\theta = \arg\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

b) $s(O)$ a pour affixe $\frac{\sqrt{2}}{2} + i$, donc $s(O) = J$;

$s(A)$ a pour affixe $-i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $s(A) = I$;

$s(B)$ a pour affixe $\sqrt{2} + i$, donc $s(B) = C$;

$s(C)$ a pour affixe $-i\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} + i) + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \sqrt{2}$, donc $s(C) = A$.

3. a) $(\Omega A, \Omega B) = -(\Omega B, \Omega A) = -\left[(\Omega B, \Omega C) + (\Omega C, \Omega A) \right] [2\pi]$. Or $s(B) = C$ et $s(C) = A$ donc

$(\Omega B, \Omega C) = (\Omega C, \Omega A) = -\frac{\pi}{2}$ et $(\Omega A, \Omega B) = \pi$ $[2\pi]$; ainsi A, B et Ω sont alignés.

b) $(\Omega C, \Omega A) = (\Omega A, \Omega I) = -\frac{\pi}{2}$ et $(\Omega C, \Omega I) = \left[(\Omega C, \Omega A) + (\Omega A, \Omega I) \right] [2\pi]$;

ainsi I, C et Ω sont alignés.

c) Ω est l'intersection des droites (AB) et (IC) .

4. a) D'après la question précédente : $(\Omega B, \Omega C) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ donc $\Omega \in \Gamma_1$ et

$(\Omega A, \Omega I) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ donc $\Omega \in \Gamma_2$.

b) $J\Omega$ a pour affixe $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i - \frac{\sqrt{2}}{2} - i = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}i$; $J\Omega$ a pour affixe

$\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i = \frac{\sqrt{2}}{4} - i$ donc $J\Omega = \frac{2}{3}JK$ J, K et Ω sont alignés.

c) $s(O) = J$ donc $(\Omega O, \Omega J) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et (ΩO) est orthogonale à (ΩJ) donc (ΩO) est la

tangente à Γ_1 en Ω . De plus (ΩO) est orthogonale à (ΩK) car $(\Omega K) = (\Omega J)$ donc (ΩO) est la tangente à Γ_2 en Ω .

Corrigé de l'exercice sur les suites.

1. D'une année sur l'autre, la société A garde 70% de ses clients et gagne 10% des clients de l'autre société :

$$a_{n+1} = 0,7a_n + 0,1b_n$$

De même, la société B gagne 30% des clients de l'autre société et garde 90% de ses clients :

$$b_{n+1} = 0,3a_n + 0,9b_n$$

Par conséquent :

$$a_{n+1} + b_{n+1} = (0,7 + 0,3)a_n + (0,1 + 0,9)b_n = a_n + b_n$$

2. Pour tout entier n :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= -3a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= -1,8a_n + 0,6b_n \\ &= 0,6(-3a_n + b_n) \\ &= 0,6v_n\end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,6

3. On a : $v_0 = -3a_0 + b_0 = -2,2$. On en déduit $v_n = -2,2 \cdot 0,6^n$. Sachant $-1 < 0,6 < 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,6^n = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

4. On utilise les deux résultats suivants :

$$\begin{aligned}a_n + b_n &= 1 \\ -3a_n + b_n &= -2,2 \cdot 0,6^n\end{aligned}$$

Une soustraction membre à membre donne : $4a_n = 1 + 2,2 \cdot 0,6^n$

$$\text{Donc } a_n = \frac{1 + 2,2 \cdot 0,6^n}{4}.$$

On calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$. Dans ces conditions, la part de marché de la société A tend vers 25%.

5. On résout :

$$\begin{aligned}\frac{1 + 2,2 \cdot 0,6^n}{4} &\leq 0,3 \\ \Leftrightarrow 1 + 2,2 \cdot 0,6^n &\leq 1,2 \\ \Leftrightarrow 0,6^n &\leq \frac{1}{11} \\ \Leftrightarrow n \ln 0,6 &\leq -\ln 11 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{-\ln 11}{\ln 0,6} \approx 4,69\end{aligned}$$

Au bout de 5 ans, la part de la société A est passée en-dessous de 30%.

Correction de l'exercice 4 du bac blanc 2007

Partie A

1.

x	$-\frac{3}{2}$	-1	1	5	C est donc la représentation graphique de g et F est celle de g' .		
$g'(x)$		$-$	0	$+$		0	$-$
g							

2. Le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 0 est $g'(0) = 1$.

Partie B

1. $x^2 + 2x$, $x - x$ et \exp sont dérivables sur \mathbb{R} donc f_0 est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x de \mathbb{R} :

$$f_0'(x) + f_0(x) = (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x)e^{-x} + (x^2+2x)e^{-x} = 2(x+1)e^{-x} \text{ donc } f_0 \text{ est une solution de (E).}$$

2. (E') $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto Ce^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

3. On sait que f_0 est une solution de (E) : pour tout x de \mathbb{R} $f_0'(x) + f_0(x) = 2(x+1)e^{-x}$.

$$f \text{ est une solution de (E)} \Leftrightarrow (f' + f)(x) = 2(x+1)e^{-x} \Leftrightarrow (f' + f)(x) = (f_0' + f_0)(x) \Leftrightarrow f'(x) - f_0'(x) + f(x) - f_0(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (f - f_0)'(x) + (f - f_0)(x) = 0 \Leftrightarrow u = f - f_0 \text{ est une solution de (E')}.$$

Les solutions f de (E) sont définies sur \mathbb{R} par $f(x) = u(x) + f_0(x) = Ce^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x} = (x^2 + 2x + C)e^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

4. g est solution de (E) $\Leftrightarrow g(x) = (x^2 + 2x + C)e^{-x}$.

De plus g vérifie la condition initiale $g(0) = 1$ donc $C = 1$. g est donc définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$.

5. De même qu'à la question 4., h est solution de (E) $\Leftrightarrow h(x) = (x^2 + 2x + C)e^{-x}$.

La représentation graphique de h admet une tangente de coefficient directeur 0 au point d'abscisse 0 si et seulement si $h'(0) = 0$. h est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x de \mathbb{R} , $h'(x) = (-x^2 + 2 - C)e^{-x}$. $h'(0) = 0 \Leftrightarrow C = 2$.

h est donc définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

Partie C

1. ∞ Pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

∞ Pour tout x de \mathbb{R} , $x^2 + 2x + 2 = x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x + 2 = +\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ et, en notant $X = -x$, $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. D'après la partie B, pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = h'(x) = -x^2 e^{-x}$ et $x^2 \geq 0$ (s'annule pour $x = 0$) et $e^{-x} > 0$.

Donc f' est strictement négative sur \mathbb{R}^* et s'annule en 0 donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3. a) f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -e$ donc T a pour équation réduite $y = -e \times x + b$. $f(-1) = e$ donc Ω a pour coordonnées $(-1; e)$. $\Omega \in T$ donc $e = -e \times (-1) + b$ donc $b = 0$. T a pour équation réduite $y = -e \times x$.

b)

